

DES CONNAISSANCES FONCTIONNELLES (MAIS IGNORÉES) EN RÉOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

Catherine Houdement

LDAR¹, Université de Rouen, France

Mots clés : Résolution de problèmes - Inférences et contrôles - Sémiotique - Qualification.

Résumé : L'étude participe à l'explicitation de causes potentielles de décalages entre élèves sur le thème de la résolution de problèmes arithmétiques en croisant des hypothèses de psychologie cognitive et une expérimentation didactique. Elle utilise une méthodologie de type clinique (entretien retour sur le travail de l'élève) pour débusquer des connaissances fonctionnelles ignorées, c'est-à-dire possédées par certains élèves, qui s'avèreraient nécessaires aux apprentissages et ne sont pas repérées dans les institutions (d'enseignement, de recherche). L'article présente des résultats issus d'un travail avec des élèves de grades 3,4,5 confrontés à des problèmes de réinvestissement : l'opération arithmétique, vue comme un modèle dont il s'agit de contrôler l'application; la relation avec plusieurs types de contrôles que nous précisons ; des questions sémiotiques rémanentes. Malgré leur singularité, ses résultats pourraient avoir une portée plus générale. L'article envisage aussi des perspectives et des limites, pour la recherche et la formation des enseignants.

Introduction

Le thème de la résolution de problèmes arithmétiques est un sujet qui nous préoccupe depuis plusieurs années. En effet c'est une forme didactique incontournable et pérenne dans l'école obligatoire qui soulève des difficultés d'enseignement récurrentes dénoncées par les enseignants et pointées par les recherches, notamment une « mise en parenthèses du sens » (par exemple Verschaffel & De Corte, 2008). Fin des années 1990, nous avons été effrayée par l'inflation, dans les ressources pédagogiques françaises, des aides dites méthodologiques pour apprendre à résoudre des problèmes. Ces

¹ Laboratoire de Didactique André Revuz.

aides préconisent des tâches telles que : rechercher des informations utiles avant de traiter le problème, trouver une question ou appliquer un algorithme de résolution général (voir par exemple en annexe) aux dépens de résolutions effectives et dans l'ignorance implicite de la nécessité de connaissances mathématiques pour résoudre les problèmes (Coppé & Houdement, 2001 ; Houdement, 1999, 2003). Nous avons dénoncé le manque de vigilance épistémologique et cognitive de ces approches, à l'instar de Sarrazy (2003) qui parle même de « démathématisation » et dénonce une confusion de genres « apprendre à résoudre un problème ne saurait être confondu ni avec la résolution elle-même, ni avec l'apprentissage des connaissances nécessaires à sa résolution » (p. 97). Nous avons interprété l'introduction de telles stratégies d'enseignement (appuyées sur des travaux sur le traitement de l'information) dans les manuels et de façon indirecte, dans les curricula français (de 1985 à 2002) comme un pis-aller, à défaut de recherches didactiques sur l'aide à la résolution de problèmes.

Notre recherche vise à comprendre ce que les élèves font lors de la résolution d'un problème arithmétique, en plus ou à côté des connaissances mathématiques qu'ils y injectent. Plus exactement quelles idées viennent aux élèves qui leur permettent d'avancer vers la réponse ?

Nous nous intéressons aux problèmes arithmétiques ordinaires, ceux que l'enseignant donne en général pour réinvestir et/ou évaluer des connaissances déjà là et liées aux opérations arithmétiques. En majorité il s'agit de problèmes verbaux (*word problems*). Un problème verbal est un texte donnant des éléments d'une situation réelle, certains de ces éléments étant quantifiés, l'objet du problème étant d'en quantifier d'autres, en s'appuyant sur le texte du problème (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000).

Bien entendu les recherches contemporaines sur les problèmes arithmétiques verbaux abondent (par ex. Coquin-Viennot & Moreau, 2007 ;

Nesher, Greeno & Riley, 1982 ; Verschaffel & De Corte. 1993 ; Verschaffel *et al.*, 2000). Un grand nombre de recherches se centre sur l'étude de l'efficacité d'outils sémiotiques comme aides externes à la résolution (droite numérique, Elia, 2011) ou plus ou moins internalisées (représentations schématiques, Fagnant & Vlassis, 2013). Ce n'est pas dans ce cadre que nous nous plaçons : notre recherche, à caractère exploratoire, s'inscrit dans la problématique des enjeux cachés d'apprentissage (Castela, 2008). Des connaissances ignorées seraient nécessaires à la réussite (ici la résolution correcte des problèmes verbaux arithmétiques), mais elles ne seraient repérées ni par les études didactiques, ni par les institutions d'enseignement, au sens où l'enseignement effectif de ces connaissances ne serait pas expressément conseillé, ni dans les programmes, ni dans les ressources pédagogiques. Parmi ces connaissances, certaines seraient utilisées par les résolveurs experts de façon non consciente, elles auraient été auto-construites ou apprises « par hasard » (à l'occasion d'une remarque d'un professeur...) ; dans tous les cas, leur absence poserait problème aux élèves qui en sont démunis.

Après avoir présenté quelques éléments théoriques et la méthodologie (sections 1 et 2), nous mettrons en avant dans les sections 3 à 5 quelques résultats, notamment des connaissances fonctionnelles pour la réussite aux problèmes, avant de conclure (section 6).

1. Un regard théorique sur les problèmes arithmétiques verbaux

1.1. Notre regard sur les problèmes verbaux arithmétiques

Les problèmes arithmétiques verbaux de réinvestissement en primaire ont cette particularité de problématiser une réalité, évoquée par l'énoncé, pour

obtenir une réponse mettant en jeu des mathématiques. Nous souhaitons distinguer deux versants du passage du réel (présent ou évoqué – Houdement, 1999) au traitement mathématique : *mathématiser* (*mathematizing*, Freudenthal, 1968) et *modéliser*. *Mathématiser* est une première étape d'apprentissage, elle consiste à construire des connaissances mathématiques à partir de la résolution de problèmes issus du réel, et ce par la transformation de modèles implicites d'action en connaissances, appuyées sur du langage et des symboles, par exemple des écritures arithmétiques (Brousseau, 1998 ; Vergnaud, 1990). Cette étape est préalable à la résolution de problèmes verbaux de réinvestissement. La *modélisation* est plutôt l'inférence, puis l'opérationnalisation de mathématiques pour résoudre un problème issu du réel. A l'instar de Verschaffel et De Corte (2008), nous considérons que la résolution de problèmes arithmétiques verbaux classiques (ceux qui contiennent toutes les informations nécessaires à la résolution, qui débouchent sur une solution calculable) relève d'une *modélisation* (Houdement, 2012).

Il s'agit donc de comprendre le processus de modélisation dans lequel s'engagent les élèves à l'occasion de problèmes arithmétiques verbaux.

Cette modélisation fait au moins intervenir deux plans, celui de la réalité et celui des modèles mathématiques, qu'il s'agit de coordonner. La distinction didactique entre le *résultat* (souvent calculé) et la *réponse* (Margolinas, 1993) qui fait écho à la question de départ du problème nous semble participer de cette coordination. Comment l'élève reconnaît-il le résultat de son calcul comme réponse à la question posée ? On connaît la tendance de certains élèves à se transformer en *calculateurs aveugles* (Sackur *et al.*, 2007 ; Verschaffel & De Corte 2008), quand ils sont confrontés à un problème arithmétique.

1.2. Des hypothèses issues de la psychologie cognitive

Nous nous fondons sur les hypothèses de psychologie cognitive synthétisées par Julo (1995, 2002) qui mettent en avant le rôle de la construction de la représentation pour la réussite à un problème. Face à un problème, le sujet a des possibilités qui varient entre deux extrêmes. Soit le problème lui évoque une certaine familiarité avec d'autres déjà rencontrés, voire déjà résolus, et cela l'aide à opérationnaliser le traitement vers la réponse grâce à une représentation adaptée du problème. Soit le problème lui semble étranger, il doit alors construire une nouvelle stratégie, appuyée sur ses expériences antérieures. Julo (1995, 2002) suppose l'existence en mémoire d'objets mentaux structurés par le sujet, les schémas de problèmes, à fonction assimilatrice, qui permettent au sujet de mobiliser dans de nouveaux problèmes des connaissances acquises lors de la résolution réussie d'anciens problèmes. La nature exacte des schémas et leur organisation en mémoire est encore floue, mais il est admis que le sujet les forme à partir des problèmes qu'il rencontre, des représentations qu'il construit et des analogies qu'il perçoit. Ces schémas se constitueraient **dans** l'activité de résolution de problèmes. Nous faisons nôtre cette hypothèse de Julo : les élèves réussiraient différemment aux mêmes problèmes en fonction de leur mémoire des problèmes résolus et leurs capacités à s'y référer.

2. Une méthodologie adaptée pour une étude clinique

Nous souhaitons débusquer des connaissances ignorées, il nous faut donc « remonter » jusqu'à la composante privée du travail de l'élève, celle qui apparaît peu sur les traces publiques. Nous devons bien sûr analyser d'une part les problèmes rédigés, mais aussi les brouillons des élèves. Le brouillon est cependant un objet pédagogique très sensible : selon les classes il n'est pas toujours valorisé comme espace personnel de travail, ni considéré

comme support heuristique privé ; il tient parfois lieu de justification du calcul, peut même être « corrigé » par l'enseignant.

Nous avons donc choisi de nous entretenir individuellement avec l'élève, après qu'il ait été confronté en classe à des problèmes arithmétiques ordinaires, choisis par l'enseignant dans le fil de sa progression. Les élèves interviewés ont été sélectionnés par l'enseignant suite à notre demande : autoriser des élèves bons, moyens ou faibles en mathématiques à quitter leur classe pour venir, avec leur copie et leur brouillon, travailler avec nous.

Nous avons choisi, pour saisir la singularité, des entretiens individuels de type explicitation (Vermersch, 1994) méthodologiquement intéressants pour relever des « connaissances cachées » (Sackur *et al.*, 1997 ; Castela, 2008). Selon Faingold (1993), collaboratrice de Vermersch, l'entretien d'explicitation est une technique de questionnement qui permet de mettre à jour des connaissances implicites mobilisées dans l'action, par un guidage très précis des verbalisations.

Nous avons étudié onze protocoles d'élèves de deux classes différentes (A et B) de grades 3, 4 et 5 (fin de l'école élémentaire française), en les mettant en relation avec copie et brouillon. En faisant des croisements entre des pensées de plusieurs élèves, nous avons ainsi dégagé des redondances entre élèves (études croisées) ou dans la pensée d'un élève particulier (monographies).

3. Mémoire des problèmes, jeux d'inférences et de contrôles

3.1. Une modélisation effective par des opérations arithmétiques....

Comme prévu dans le modèle de Julo, certains élèves² infèrent directement du contexte l'opération comme le traduisent leurs verbalisations à notre question³ :

CH : Comment tu sais pour un problème que c'est moins / plus / fois

Victor (3, A) : Bah quand j'ai la question je sais moins / plus / fois

Clémence (3, B) Bah quand je lis l'énoncé ça me vient comme ça / quand je le lis.

Sébastien (3, A) **Parce** que là j'ai pas vraiment réfléchi / donc j'ai pris une feuille de brouillon et pis j'ai écrit j'ai écrit, et pis j'ai trouvé.

Pour d'autres (ou les mêmes en d'autres occasions), la convocation de l'opération semble moins immédiate : ils infèrent « seulement » le « bon » champ conceptuel (hésitent entre addition et soustraction ou entre multiplication et division), puis ils décident de la bonne opération par différents types de contrôle. Parfois ils testent successivement plusieurs opérations : ils évaluent ou calculent le résultat avec l'une, puis l'acceptent ou le rejettent.

Ainsi Deborah (5, A), ayant à trouver le poids d'une table connaissant la masse (300 kg) de 25 tables, essaie une division qu'elle infère sans doute du contexte : ce que nous appellerons une **inférence sémantique** (premier extrait). Mais devant notre question, elle a un moment de doute , elle hésite

² Nous indiquons entre parenthèses pour chaque élève le niveau de classe (grade 3 : 8-9 ans ; grade 4 : 9-10 ans ; grade 5 : 10-11 ans) et s'il s'agit de la classe A (triple grade : 3, 4, 5) ou B (grade 5 seulement).

³ Nous regroupons parfois les réponses, mais elles sont toujours issues d'entretiens individuels.

entre deux opérations (du même champ conceptuel) et met en œuvre (second extrait) pour les départager deux contrôles : le premier concerne l'ordre de grandeur du résultat calculé relativement au contexte (*c'est beaucoup trop..* sous-entendu pour le poids d'une table), nous le nommerons un **contrôle pragmatique** ; le second est un **contrôle sémantique** qui renforce pour elle l'idée de la division (*partager c'est diviser*). Les deux contrôles lui font rejeter le modèle de la multiplication.

PREMIER EXTRAIT

C.H. : Est-ce qu'avec ces deux phrases là : 25 tables et 300 kg on peut trouver le poids d'une table ?

Deborah [hésitante] : Oui / Enfin...

C.H. : Si tu as besoin d'un papier...

Deborah : [*en regardant C.H.*] : Je vais faire 300 divisé par 25.

SECOND EXTRAIT

C.H. : Pourquoi tu penses que c'est l'opération qui va te permettre de trouver le résultat ?

Deborah : Bah, parce qu'on peut faire une multiplication / 300 multiplié par 25, c'est pas possible / C'est beaucoup trop / Ni une soustraction / Donc je pense faire une division / Et aussi parce qu'il faut partager / Il faut / Oui, faut partager.

3.2. ... à l'intérieur d'un jeu entre inférences et contrôles

Nous avons mis ainsi en évidence des contrôles sur le résultat calculé pour sa transformation en une réponse. Il s'agit de contrôle-vérification au sens de Coppé « *argument avancé ou action mise en œuvre par l'élève pour limiter l'incertitude sur le résultat (...). Une vérification a pour conséquence soit d'accroître la vraisemblance et éventuellement acquérir la certitude du résultat, soit d'engendrer un doute plus grand et éventuellement déboucher*

sur une phase de rectification. » (Coppé, 1995, p. 30). Le contrôle augmente la plausibilité de la réponse, mais n'assure pas la certitude.

Ces contrôles sont de plusieurs natures.

Nature sémantique : c'est l'interprétation de la situation du problème (Coquin-Viennot & Moreau, 2007 ; Vergnaud, 1997), interprétation liée à la représentation que l'élève se fait du problème (au sens de Julo, 1995) qui déclenche des associations de type : 'partager c'est diviser' ; 'fois c'est multiplier'. A priori ce type d'interprétation se place en amont du choix d'une opération, d'un calcul, c'est alors une inférence. Dans la suite nous ne distinguerons plus inférences et contrôles, mais uniquement la nature de ceux-ci, qui est en relation avec les connaissances que les élèves convoquent pour résoudre le problème.

Nature pragmatique : c'est la connaissance de la réalité évoquée par le texte du problème qui permet d'inférer et/ou qui régule le résultat (par exemple l'ordre de grandeur) et éventuellement convainc l'élève de s'engager dans un autre calcul. Notons que cette connaissance du réel (conjoncturelle et locale) peut aussi faire obstacle à l'obtention de la réponse, le réel du problème n'étant pas toujours celui que l'élève fréquente dans son environnement.

Voici des exemples pour les inférences et contrôles sémantiques et pragmatiques

Nicolas (5, A) utilise le contrôle pragmatique pour tester l'opération.

C.H. : D'accord. Et comment tu sais que tu dois choisir plus ou multiplier ?

Nicolas : J'essaie comme ça.

C.H. : T'essaies comme ça ? Et comment tu sais si ça va ou si ça va pas ?

Nicolas : Bah, quand je vois que le nombre est trop grand ou trop petit ou que ça me paraît un peu trop.

Ludivine (5, A) infère la bonne opération et la contrôle sémantiquement (pour elle, la division diminue le nombre de départ, la multiplication l'augmente) et pragmatiquement (il faut plus d'œufs que de brioches).

C.H. : Bon ça va faire combien d'œufs : 3 œufs pour une brioche, combien pour 8 000 ?

Ludivine : Je sais pas // C'est une multiplication.

C.H. : C'est un partage [évoqué par Ludivine plus haut dans l'entretien] ou une multiplication ?

Ludivine [silence, puis lentement] : Si on fait une division, on va peut-être trouver moins / que si on fait une multiplication on va trouver plus.

C.H. : Alors ?

Ludivine : Bah, une multiplication.

Deborah (5, A) montre l'influence première du pragmatique sur le contrôle de sa réponse.

Deborah [elle pose la division 300 par 25] : On trouve 12.

C.H. : Alors qu'est-ce que c'est 12 ?

Deborah : Le poids d'une table.

C.H. : Es-tu sûre de ça ?

Deborah : Non, ça m'étonnerait.

C.H. : Pourquoi ça t'étonnerait ?

Deborah : Bah c'est beaucoup / C'est pas assez je veux dire.

3.3. L'oubli du contexte, qui empêche de contrôler les résultats

Les contrôles sémantique et pragmatique reposent sur la relation entre le modèle mathématique et le contexte du problème (le plan de la réalité). Or, certains élèves « oublient » le contexte dès qu'ils ont calculé : c'est le cas de Nicolas (5, A) déjà mentionné plus haut.

Pour le premier problème, « Kristy s'amuse à ajouter les chiffres qu'elle lit sur sa montre digitale (par exemple 21 17, son résultat est 11). Quelle est la plus grande somme qu'elle peut obtenir ainsi ? », rien n'est écrit sur sa copie, ni sur son brouillon.

CH : Le problème des chiffres / essaie de repenser à quoi tu as pensé hier quand tu as décidé de faire ce problème-là

Nicolas : Alors j'ai fait 2 fois 7, 14 et 1 plus 1, 2/ ça fait 16

CH : Et alors // je vois que tu n'avais rien écrit

Nicolas : Parce que je n'y étais pas arrivé

(...)

CH : Est ce que tu peux relire / *il relit* / qu'est ce qu'elle fait Kristy

Nicolas : Bah elle additionne ces deux chiffres là pour trouver 11

CH : Elle additionne...

Nicolas : 2 plus 7 plus 1 plus 1

CH : Et ça fait combien cela

Nicolas : 11 (perplexité)

CH : Et comment ça se fait que tu n'aies pas trouvé 11 tout à l'heure

Nicolas : Je sais pas ce que j'ai cherché (*silence perplexe*)

Plus précisément dans le problème suivant, nous allons voir comment Nicolas s'enferme dans le monde numérique sans revenir au contexte du problème.

Le problème étudié est le suivant : « Au cinéma « royal ciné », un adulte paye 6 € par séance et un enfant paye 4 € par séance. A la séance de l'après-midi, il y avait 50 adultes et des enfants. A la séance du soir, il y avait 15 adultes et 20 enfants. La recette de la journée est 542 €. Combien y avait-il d'enfants à la séance de l'après-midi ? ». Dans un premier temps, Nicolas, après une suite de calculs justes, posés en colonne sur son brouillon, recopiés sur la feuille

réponse, a proposé la réponse 72 [qui correspond au prix payé par les enfants de l'après midi].

Nicolas : Bah là j'ai essayé de faire / parce que un adulte c'est 6€ et un seul enfant 4€/ un adulte c'est 6€ donc j'ai fait 15 fois 6, 90 / ensuite il y avait 20 enfants à la séance / comme c'était 4€ j'ai fait 20 fois 4, 80 / euh/ il y avait 50 adultes donc j'ai fait 50 fois 6, 300 / et là il demandait combien il y a d'enfants à cette séance / donc j'ai additionné ces 3 là et j'ai trouvé 542 / j'ai trouvé la recette de la journée / j'ai trouvé 72 enfants

(...)

CH : Le nombre 90 que tu as trouvé là / si tu pouvais me donner une petite phrase qui va avec ce nombre là

Nicolas (*silence*)

CH : Tu vois pas / donc quand tu as fait le calcul tu avais envie de faire ce calcul-là mais tu vois pas à quoi correspond 90

Nicolas : Non

Dans la première ligne, Nicolas nous montre comme il jongle, en avançant dans le problème avec des calculs cohérents, mais en ne conservant que des nombres en dehors de toute contextualisation. C'est ce que nous appelons un défaut de *qualification*.

Dans les autres lignes citées, Nicolas se révèle incapable de qualifier ce 90. Il se pourrait qu'il ne comprenne pas notre demande, car il est dans l'ignorance de l'intérêt de qualifier pour avancer.

CH : Et ce calcul là (*montrant 4×20*) / est ce que tu vois à quoi il correspond /

Nicolas : Á 4 fois 20

CH : Mais par rapport au problème qu'est ce que tu as calculé par rapport au problème

Nicolas : Bah 4 € et 20 enfants

CH : Et finalement quand tu fais 4€ et 20 enfants qu'est-ce que tu obtiens à la fin

Nicolas : 80€

CH : Donc tu obtiens un prix / le prixqu'ont payé les enfants (...)

Dans ce dernier échange, Nicolas réussit à qualifier le 80 par son unité (euros). Nous appellerons le fait de transformer le nombre calculé (80) en la grandeur obtenue (80 €) une **qualification faible** pour la distinguer de la **qualification** (complète) qui consisterait à reconnaître 80 € comme prix payé par les enfants à la séance de l'après-midi. Il existerait pour 80 € des qualifications intermédiaires : prix payé ou prix payé par les enfants.

La qualification faible faite par Nicolas ne règle pas la question de la qualification comme le montre l'échange suivant :

CH : donc tu obtiens un prix / le prixqu'ont payé les enfants / et là quand tu fais 50 fois 6

Nicolas : Euh bah c'était les 50 adultes multiplié par les 6€ de la séance

CH : Donc ça correspond à quoi

Nicolas : Les 50 adultes

CH : Donc les 300 ce sont des adultes ou des euros

Nicolas : (hésitation) des euros

CH : Des euros / c'est le prix que payent les adultes / donc là tu as le prix que payent les enfants / là le prix que payent les adultes / et finalement le 90

Nicolas : C'est les 15 adultes plus les 6€

Devant notre insistance et notre étayage, Nicolas réussira quelques échanges plus tard (ligne 100) à **qualifier** 72 comme prix payé par les enfants de la séance de l'après-midi : il comprendra pourquoi sa réponse au problème était erronée, malgré ses calculs corrects et adaptés.

3.4. La nécessité d'une connaissance : la qualification

La confrontation des verbalisations de deux élèves, Nicolas et Corentin, nous a révélé l'importance de la qualification dans le processus de résolution.

Corentin (4, A), nous dit spontanément l'importance qu'a pour lui la qualification, qu'il semble avoir apprise de façon autonome. A notre question de départ (ce qu'il ressent confronté à un problème de mathématiques), il mentionne le souvenir vivace d'un jour où il « *s'était embrouillé* » car il « *avait mélangé le nombre de T-shirts et les euros* ». Nous analysons cela comme un épisode biographique (Mercier, 1998), moment de l'espace-temps douloureux, qui lui a permis un apprentissage, celui de l'importance de la qualification. La trace de cette connaissance, qualifier, est visible sur son brouillon : elle se traduit par une légende sur les nombres de l'énoncé spécifiant leur qualification dont nous reproduisons ici un extrait relativement au problème :

« Le libraire dit : « avec mes 2 255 €, si j'achète 36 livres d'art à 62 €, il me restera 13 €. ». A-t-il raison ? »

Entretien ligne 18	Sur son brouillon
<p>Corentin : En fait dans ma tête quand je lis : là il y a 2 255 € ça c'est clair. Y a 36 livres, ça coûte 62 €. Après je calcule ces deux-là, après ça fait le nombre d'euros que je dois payer, et après je compare les deux que j'ai : le nombre d'euros et ce que j'ai trouvé.</p>	<p>2 255 : euros 36 : livre-darts 62 : prix des livre-darts⁴</p>

Remarquons que Corentin possède deux connaissances d'ordres différents : il sait qualifier, il sait en plus que la qualification est une connaissance nécessaire (connaissance métacognitive).

4. Le rôle instrumental des écritures mathématiques

Nous avons pointé un troisième jeu d'inférences et de contrôles que nous avons nommé syntaxique. Les **inférences et contrôles syntaxiques** correspondent aux relations entre les objets mathématiques (ici les nombres) qui permettent d'avancer : seuls les nombres sont conservés ; il s'agit des mesures en jeu sans référence aux grandeurs qu'elles mesurent, par exemple 12, et non 12 euros ou 12 tables. Le contrôle s'exerce sur les écritures mathématiques (ou l'oral qui les décrit), indépendamment de la signification que ces écritures ont par rapport au texte du problème ou aux grandeurs en jeu. Cette décontextualisation peut se révéler problématique pour l'obtention de la réponse, comme l'a montré l'exemple de Nicolas étudié dans le paragraphe d'avant, mais elle est souvent très utile pour l'obtention d'un résultat.

Sébastien a bien réussi deux premiers problèmes : sur sa copie figure une phrase-réponse correcte. Dans le premier problème, il a traité oralement

⁴ La façon d'orthographier de Corentin est volontairement conservée.

l'équation « *il en avait perdu 48 (...) et puis il en restait 127, donc j'ai imaginé 127 plus 48* » : il montre par là qu'il sait mettre en œuvre oralement la réversibilité dans le cas additif (passer oralement de $X-48 = 127$ à $X = 127+48$). Dans le second problème, « Combien a-t-il reçu de timbres à son anniversaire ? Avant il avait 573 timbres, après il en a 1260. », il a formulé l'équation oralement, par analogie avec un problème déjà résolu « *J'ai vu que dans mon fichier c'est à peu près sauf que c'est à 100. Et bah, on essaie de trouver 573 par exemple à 100 / Et pis là, j'ai cherché mais jusqu'à 1 260* », puis il a résolu par essais successifs écrits (travail de calcul), sans passer par une écriture soustractive.

En revanche, le dernier problème, « 6 voitures par carton, 1830 voitures à expédier », lui a résisté : il a reconnu un problème multiplicatif, il a su formuler une partie de l'équation oralement « *J'ai essayé de faire 6 fois quelque chose* », mais comme la recherche par approximations n'a pas abouti (travail de calcul), il s'est replié sur le produit 2 fois 1830 : « *Je sais / Une idée bête / Je sais qu'il fallait trouver 1830 / Mais j'essaie quand même fois 2 fois / même si c'était plus grand.* » Nous interprétons ses actions comme la certitude du champ multiplicatif pour ce problème et la non-conscience de l'intérêt d'un écrit fonctionnel, dans le registre des écritures pré-algébriques, tel $6 \times ? = 1830$. Nous faisons l'hypothèse que cet écrit aurait permis à Sébastien de trouver un résultat en faisant des essais successifs, comme il a su le faire pour le second problème. L'écrit finalement produit par Sébastien (2×1830) reste décalé mais il en est conscient « *Je sais / Une idée bête..* », ce qui confirme qu'il manque d'un outil adapté.

L'étude de Sébastien illustre l'avantage de disposer expressions langagières et écritures pré-algébriques pour décrire et travailler le mathématique. Le travail sur les expressions verbales suffit à Sébastien pour avancer dans les problèmes additifs. Il est aussi vrai qu'il est usuel à l'école de travailler des écritures de type $A + X = B$. Par contre il ne sait pas transformer « 6 fois

quelque chose égale 1830 ». On pourrait mettre cela en relation avec un **déficit de travail sémiotique** des mathématiques scolaires de l'école qui utilisent peu les écritures $A \times X = B$ et mettent peu en avant le travail de transformation de $A + X = B$ en $X = A - B$ (et réciproquement) et $A \times X = B$ vers $X = A/B$ (et réciproquement).

5. L'empêchement de penser

Dans la classe B, le hasard a fait que deux élèves interrogées évoquent des raisons externes, des aides externes sans lesquelles elles ne conçoivent pas la résolution de problèmes.

Clémence (5, B) revendique un désamour.

CH : D'accord tu vois / est ce que tu as eu l'impression d'avancer là

Clémence : Bah oui en fait quand je suis avec quelqu'un j'arrive à le faire parce qu'on m'explique / mais quand je suis toute seule je me perds complètement

CH : Alors comment ça se fait que tu te perds complètement ?

Clémence : L'autre fois c'est un copain qui m'a expliqué qui était très fort en math et qui m'a dit / à mon avis c'est parce que t'aimes pas les math et que tu t'y accroches pas

Alors que Marie (5,B) cherche l'aide, voire la réponse à l'extérieur de sa lecture du problème :

CH : Et justement quand tu as un problème comme ça un peu dur / comment tu fais pour essayer

Marie : Quand je comprends pas d'abord je demande soit à Mme S, soit à M.G [*les deux maîtres de la classe, en alternance*]/ ça dépend avec qui je fais des problèmes / et enfin autrement avant de demander je réfléchis / et si je trouve / ça marche tout seul quand je trouve

Ou plus loin

CH : Mais si tu étais toute seule comment tu ferais /s'il n'y avait pas M. G ou Mme S

Marie : Si j'étais toute seule chez moi / mais sans personne ?

CH : Sans personne pour t'aider

Marie : Bah / s'il y a un autre problème je passe à l'autre / jusqu'à ce que mes parents arrivent / m'apportent / quelqu'un qui pourrait m'aider

Plus loin encore

Marie : Je me dis... / des fois / par exemple quand je suis en classe / des fois je regarde comme ça / et tout d'un coup je tombe sur / enfin mes yeux y tombent sur un cahier /automatiquement / et alors je vois quelque chose / mais je cherche toujours comment il a pu trouver ça / ou elle a trouvé ça / sinon / enfin / je ne pourrais pas copier comme cela //et autrement quand je suis toute seule/ bah / je préfère pas trop le faire / par exemple si ma mère m'a demandé de le faire pendant qu'elle va faire les courses / par exemple plusieurs problèmes et que j'y arrive pas à celui-là / bah / je préfère passer à un autre problème / parce que celui-là comme il est dur / je vais pas perdre mon temps à réfléchir pour rien / pour ça /

Marie refuse de s'engager dans l'incertitude, persuadée qu'elle est incapable seule de trouver la réponse, laissant supposer que sa conception de la résolution de problèmes : la solution doit apparaître quasi immédiatement « je vais pas perdre mon temps à réfléchir pour rien ».

On connaît l'influence des conceptions des élèves sur leur propension à s'engager dans une activité et le rôle de l'engagement dans l'apprentissage. Que faire pour de tels élèves, de moins en moins rares et à mesure qu'on avance dans les niveaux de classe ?

6. Conclusion

6.1. Pertinence de la méthode

La méthode employée, entretien à visée d'explicitation a porté ses fruits pour de jeunes élèves : elle a mis à jour des connaissances d'élèves aidant à la réussite, ignorées ou faiblement connues des institutions que ce soit le jeu des contrôles ou la qualification. Elle a révélé le déficit instrumental des écritures arithmétiques chez les élèves, mettant peut-être à jour un pan de l'enseignement insuffisamment travaillé. L'étude clinique a été productrice en nouvelles hypothèses de recherche.

6.2. Inférences et contrôles, un complexe de connaissances

Le complexe « inférence d'un modèle et jeu de contrôles » permet de décrire la plupart des actions (mentales) des élèves interviewés. Il donne à voir une façon de résoudre les problèmes arithmétiques. Notons que ce modèle permet aussi de décrire le choix d'une opération inadaptée, trop vite qualifiée d'incompréhension du problème : l'élève a aussi modélisé, mais sans contrôler son modèle. Il a rempli une partie du contrat classique lié aux problèmes arithmétiques : l'enseignant attend que les élèves trouvent une opération. Comment lui apprendre à remplir aussi l'autre partie, contrôler la pertinence du modèle ? L'enseignement du contrôle est peu visible dans les pratiques : il est absent des programmes, peu questionné pour l'école primaire. Les travaux contre la « mise entre parenthèses du sens » (Verschaffel *et al.*, 2000) vont dans le sens de développer des jeux de contrôle. Mais ces jeux de contrôles font partie des connaissances métacognitives dont on connaît la difficulté d'un enseignement direct.

La pratique de résolution de problèmes réalistes (Verschaffel *et al.*, 2008), problèmes dont il faut toujours vérifier pragmatiquement la pertinence du

modèle pourrait rendre les élèves conscients de la nécessité de contrôler leur réponse. De problèmes « pièges » existent déjà dans les mathématiques classiques, mais leur spécificité n'est pas pointée : le problème « 38 sportifs doivent se rendre au stade. Combien de voitures utiliser ? Une voiture peut contenir 5 personnes »⁵, (les élèves répondent souvent 7 voitures) est moins réussi que le même avec 40 sportifs. Pourtant les implicites à combler sont de même nature. Elle permettrait à l'instar de Verschaffel *et al.*, (2008) de reconceptualiser les problèmes arithmétiques classiques en exercices de modélisation.

6.3. Confronter les élèves à différents types de problèmes

Cet enseignement des problèmes réalistes ne remplace le travail sur les **problèmes basiques** (un énoncé comprenant deux nombres, il faut trouver le troisième, l'inférence de l'opération adaptée donne le calcul à exécuter). Le contrôle sémantique est directement lié au sens des opérations. Sans développer plus avant, psychologie cognitive et didactique se rejoignent sur le point suivant : « *Cet ensemble de résultats suggère qu'il est préférable de faire travailler les enfants sur une grande variété de problèmes de structures différentes en insistant sur l'analyse et l'interprétation des situations-problèmes plutôt que de leur faire apprendre des procédures liées à des types de problèmes particuliers* ». (Thevenot *et al.*, 2010, p.163)

L'étude de Nicolas nous révèle les conséquences d'un déficit de qualification sur le traitement d'un problème. Le problème étudié n'est pas basique, il est composé de sous-problèmes basiques dont il s'agit de planifier l'étude : nous le qualifierons de **problème complexe**. Pour un problème basique, un déficit

⁵ Pour être calculable, les implicites de ce problème doivent être levés : les chauffeurs des voitures sont présents et déjà comptés parmi les personnes ; on décide de remplir les voitures.

de qualification aurait sans doute peu de conséquence. Par contre un tel déficit perturbe la résolution d'un problème complexe. Il semble important que les élèves soient aussi confrontés à des problèmes complexes (dans le sens où nous l'entendons) pour être confrontés à la nécessité de qualifier, une connaissance nécessaire à une modélisation réussie.

Quel rôle peut jouer la résolution de **problèmes atypiques** bien choisis⁶ et bien menés, problèmes pour lesquels a priori tous les élèves de la classe doivent construire une nouvelle stratégie (Houdement, 2009) ? La fréquentation de tels problèmes réussirait-elle à susciter l'engagement des élèves de la classe B dans une résolution. Mais l'introduction de tels problèmes dans les pratiques ordinaires n'est pas simple : un rapport du Ministère (IGEN 2006) décrit les dérives qui ont suivi leur introduction dans les programmes 2002 du primaire français⁷.

6.4. Le travail sur la sémiotique

Comment intégrer dans l'enseignement le travail sémiotique mentionné au point 4 ? Ce travail est nécessaire car selon Duval (2006), une spécificité des mathématiques réside dans le fait que « les objets étudiés sont inaccessibles en dehors de représentations relevant uniquement d'une activité sémiotique » (p.5), que ces représentations soient orales ou écrites, plus ou moins formalisées. Il ajoute : « en mathématiques, une représentation n'est intéressante que dans la mesure où elle peut se transformer en une autre

⁶ Un exemple de tel problème est le suivant « classique ». Ce problème (qui relève d'un système de 2 équations à 2 inconnues) permet l'auto-contrôle du résultat par confrontation aux deux contraintes de l'énoncé. Il est résolu en cycle 3 par approximations successives, le plus complexe pour l'élève étant de commencer en « osant » une hypothèse sur le nombre de poules (ou de lapins).

⁷ En ligne sur www.snuipp.fr/IMG/pdf/les_problemes_pour_chercher_C2_et_C3.pdf (consulté 13-10-13)

représentation » (idem, p.8). Utiliser des représentations sémiotiques, les transformer les unes en les autres fait donc partie du travail mathématique. C'est ce manque de flexibilité dans l'utilisation des représentations sémiotiques (passer de l'oral « 6 fois quelque chose égale 1830 » à l'écrit « $6 \times X = 1830$ », puis à l'écrit $X = 1830 : 6$) qui a sans doute empêché Sébastien de conclure.

Se pose cependant la question de l'enseignement de telles connaissances. Exercer la transformation systématique des écritures (d'une écriture additive en une écriture soustractive équivalente, d'une écriture multiplicative en une écriture équivalente faisant intervenir la division) peut vite devenir un jeu formel dépourvu de sens. Travailler la flexibilité des procédures de calcul lors de séances de calcul mental serait une piste plus intéressante, en multipliant les formulations (chercher le complément de a à b, c'est aller de a à b, c'est chercher b-a, calculer l'écart entre a et b) et en utilisant des écritures arithmétiques pour décrire ces procédures. Mais ce n'est qu'une piste.

6.5. Les effets enseignants

La plupart des élèves interrogés dans la classe A ont montré soit sur leur brouillon, soit lors de la verbalisation (y compris quand le brouillon était resté vierge pour le problème) leur engagement et leur responsabilité dans la recherche d'une réponse construite à partir de leurs connaissances et des éléments du problème. Les deux élèves de la classe B ont au contraire montré leur désengagement. Plus généralement, il serait intéressant d'étudier quelles influences (et de quelle façon) les enseignants peuvent avoir sur les engagements des élèves dans la résolution de problème.

Références bibliographiques

- Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques (Didactique des mathématiques 1970-1980)*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Castela, C. (2008). Approche didactique des processus différenciateurs dans l'enseignement des mathématiques. *Perspectives en Didactique des mathématiques Cours de la XIII^e École d'été de didactique de mathématiques 2005*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Coppé, S. (1995). Types de connaissances mises en œuvre par les élèves dans la détermination de la composante publique de son travail. In *Différents types de savoirs et leur articulation* (pp. 129-144). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Coppé, S., & Houdement, C. (2001). Réflexion sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire. *Grand N*, 69, 53-62.
- Coquin-Viennot, D., & Moreau, S. (2007). Arithmetic problems at school: When there is an apparent contradiction between the situation model and the problem model. *British Journal of Educational Psychology*, 77, 69-80.
- Duval, R. (2006). *Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques*. In *Actes du colloque COPIRELEM 2005 Strasbourg* (pp.67-89). IREM de Strasbourg.
- Elia, I. (2011). Le rôle de la droite arithmétique dans la résolution de problèmes additifs. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 45-66.
- Fagnant, A., & Vlassis, J. (2013). Schematic representations in arithmetical problem solving: Analysis of their impact on grade 4 students. *Educational Studies in Mathematics*, 84, 149-168.

- Faingold, N. (1993). Accéder aux savoirs implicites de l'acte pédagogique : l'entretien d'explicitation avec les enseignants experts. *Actes du premier congrès AREF*.
- Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful?, *Educational Studies in Mathematics*, 1, 3-8.
- Houdement, C. (1999). Le choix des problèmes pour la résolution de problèmes. *Grand N*, 63, 59-76.
- Houdement, C. (2003). La résolution de problèmes en question. *Grand N*, 71, 7-23.
- Houdement, C. (2009). Une place pour les problèmes pour chercher, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 14, 31-59.
- Houdement, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 67-96.
- Houdement, C. (2012). Démarche expérimentale en résolution de problèmes ? In J.-L. Dorier & S. Coutat (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (pp. 1389-1399, GT10).
- IGEN MENESR (2006) *L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire*. En ligne sur <http://www.education.gouv.fr/cid4172/l-enseignement-des-mathematiques-aucycle-3-de-l-ecole-primaire.html> (consulté le 13-10-13).
- Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*. Presses Universitaires de Rennes.

- Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, 69, 31-52.
- Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Mercier, A. (1998). La participation des élèves à l'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18.3, 279-310.
- Nesher, P. Greeno, J.G., & Riley, M.S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction, *Educational Studies in Mathematics*, 13, 373-394.
- Sackur, M., & al (1997). Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ?, *Repères-IREM*, 28, 37-68.
- Sarrazy, B. (2003). Le problème d'arithmétique dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire de 1887 à 1990. *Carrefours de l'Éducation*, 15, 82-101.
- Thevenot, C., Barrouillet, P., & Fayol, M. (2010). De l'émergence du savoir calculer à la résolution des problèmes arithmétiques verbaux. In M. Crahay & M. Dutrévis (Eds.), *Psychologie des apprentissages scolaires* (pp. 137-166). Bruxelles : De Boeck.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10-2.3, 133-170.
- Vergnaud, G. (1997 ; 2001). *Le Moniteur de Mathématiques cycle 3. Résolution de problèmes*. Paris : Nathan.
- Vermersch, P. (1994). *L'entretien d'explicitation*. Paris : ESF.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1993). A decade of research on word problem solving in Leuven: theoretical, methodological and practical outcomes, *Educational Psychology Review*, 5, 239-256.

Verschaffel, L., Greer, B., & de Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*, Lisse (Netherlands): Swets & Zeitlinger Publishers.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (2008). La modélisation et la résolution des problèmes d'application : de l'analyse à l'utilisation efficace. In M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte & J. Grégoire (Eds.). *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?* (pp. 153-176). Bruxelles : De Boeck Supérieur « Pédagogies en développement ».

ANNEXE - AIDE-MÉMOIRE proposé pour Résolution de problèmes par le manuel *Nouvel Objectif Calcul CM1*, Paris : Éditions Hatier 1995 (pp. 222-223).

Tu possèdes les outils nécessaires pour résoudre des problèmes.
Le plan qui suit te rappelle dans quel ordre utiliser ces outils et à quelle(s) étape(s) te reporter si tu es oublié comment faire.

